Portfolio Modelling

نمذجة حقيبة إستثمار:

تعاريف:

1- **ملكية** (او راس مال أو اصول) **Asset** أي شيئ ممتلك ذا قيمة عند تبادلة بشيئ آخر. مثلا يمكن ان يكون ملكية مالية أو ملكية مادية مثل سيارة أو منزل.

2- **إستثمار Investment** وهو توليد نقدية أكثر من خلال إستخدام رأس المال.

3- **ضمان Security** وهو عقد بقيمة محددة و الذي يمكن أن يشترى أو يباع.

4- **سند Bond** هو ضمان يصدر أو يباع من قبل مؤسسة أو حكومة من أجل إستلاف نقد من الشعب على أساس طويل الأجل.

5- **سهم Share** هو شهادة تمثل ملكية في مؤسسة أو شيئ مقابل.

6- **حصة Stock** وهي إمتلاك لشركة يدل عليه بأسهم و التي تمثل جزء من رأس مال الشركة أو عائداتها.

مثال 1:

قيمة إستثمار أزدادت من 200$ إلى 260$ في سنة واحدة.

1) ماهو **عائد Return** هذا الإستثمار بالدولار؟

2) ماهو عائد Return هذا الإستثمار المئوي؟

الحل:

1)

$$260 - 200 = 60$$

العائد هو 60$

2)

$$60 / 200 = 0.3$$

نسبة العائد هى 30%

<u>تعريف:</u>

<u>حقيبة إستثمار Portfolio</u> هي مجموعة من الملكيات المالية و التي يمتلكها مستثمر.

<u>تعريف:</u>

لنعتبر حقيبة أستثمار مكونة من الملكيات $A_1, A_2, ..., A_N$ نعرف **الجزء Proportion** أو **الوزن Weight** للملكية $A_k, (k = 1, 2, ..., N)$ بـ

$$x_k = \frac{\$ value\ invested\ in\ asset\ A_k}{total\ \$\ value\ invested\ in\ the\ portfolio}, (k = 1, 2, ..., N)$$

سوف نمثل حقيبة إستثمار من الملكيات $A_1, A_2, ..., A_N$ كمتجه عمودي $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_N \end{bmatrix}$ حيث x_k هي الجزء أو الوزن للملكية $A_k, (k = 1, 2, ..., N)$ في حقيبة الإستثمار. واضح أن $x_1 + x_2 + \cdots + x_N = 1$.

<u>مثال 2:</u>

أستثمر أحمد \$20 في الملكية A_1 و \$30 في A_2 و \$50 في A_3 ماهي نسب الملكيات في حقيبة الإستثمار هذه.

الحل:

مجموع القيم المالية في الحقيبة هي

$\$20 + \$30 + \$50 = \$100$

و النسب للملكيات هي

$$A_1 : x_1 = \frac{20}{100} = 0.2$$
$$A_2 : x_2 = \frac{30}{100} = 0.3$$
$$A_3 : x_3 = \frac{50}{100} = 0.5$$

و هكذا فإن هذة الحقيبة تمثل بالمتجه $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix}$. لاحظ ان $0.2 + 0.3 + 0.5 = 1$

<u>مثال 3:</u>

أستثمر بكر 50$ في الملكية A_1 و 30$ في الملكية A_2 . تعطي A_1 عائد 2% و A_2 عائد 10% في السنة.

1) ماهي نسب الملكيات في هذه الحقيبة؟

2) ما هي نسب العوائد المئوية لهذه الحقيبة سنويا؟

الحل:

1) القيمة المالية الكلية للمحفظة هي

$\$50 + \$30 = \$80$

النسب لكل ملكية:

$$A_1 : x_1 = \frac{50}{80} = 0.625$$
$$A_2 : x_1 = \frac{30}{80} = 0.375$$

وهكذا نمثل الحقيبة بالمتجه $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.625 \\ 0.375 \end{bmatrix}$.

2) العائد المالي للملكيات

$A_1 : \$50 \times 0.02 = \$1$

$A_2 : \$30 \times 0.10 = \$3$

ويكون العائد المالي للحقيبة

$\$1 + \$3 = \$4$

ونسبة العوائد المالية

$4 / 80 = 0.05 = 5\%$

يمكن حساب نسبة العائد المالي كالتالي

0.625 x 2% + 0.375 x 10% = 5%

تعريف:

نسبة العائد r من إستثمار يعامل كمتغير عشوائي ويرمز للعائد المتوقع expected return بالرمز $\mu_r = E(r)$ و التباين بالرمز $\sigma_r^2 = Var(r)$ ويستخدم الإنحراف المعياري σ_r كمقياس **لمخاطرة الإستثمار Investment Risk** .

مثال 4:

الجدول التالي يبين كل الإمكانيات لعائد من ملكية G

العائد من الملكية G (%)	20	12	4
الإحتمال	0.3	0.5	0.2

للملكية G أحسب:

1) العائد المتوقع.

2) التباين و الإنحراف المعياري.

الحل:

نرمز للعائد من الملكية G بالرمز r و هو متغير عشوائي

(1

$$\mu_r = E(r) = 20\times 0.3 + 12\times 0.5 + 4\times 0.2 = 12.8\%$$

(2

$$\sigma_r^2 = Var(r) = (20-12.8)^2 \times 0.3 + (12-12.8)^2 \times 0.5 + (4-12.8)^2 \times 0.2 = 31.36$$

$$\sigma_r = \sqrt{Var(r)} = \sqrt{31.36} = 5.6\%$$

تعريف:

نرمز ν_k للقيمة المالية للملكية A_k في الحقيبة x. و r_k لنسبة العائد من الملكية A_k لمدة سنة واحدة.

القيمة الكلية للمحفظة x هي

$$\sum_{i=1}^{N} \nu_k$$

و تكون المحفظة

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}, \quad x_k = \frac{\nu_k}{\sum_{i=1}^{N} \nu_k}, k = 1, \ldots, N$$

في سنة يكون العائد المالي للمحفظة

$$x = \sum_{i=1}^{N} r_k \nu_k$$

و نسبة العائد من x

$$\frac{\sum_{k=1}^{N} r_k \nu_k}{\sum_{k=1}^{N} \nu_k} = \sum_{k=1}^{N} r_k \frac{\nu_k}{\sum_{i=1}^{N} \nu_k} = \sum_{k=1}^{N} r_k x_k$$

سوف نستخدم كلمة العائد بدل من نسبة العائد للإختصار. سوف نعرف أي محفظة بـ x و عائدها أيضا بـ x وهكذا.

نظرية:

لأي محفظة x بملكيات $A_1, A_2, \ldots, A_N$

العائد

$$x = \sum_{i=1}^{N} r_k x_k, \quad x_1 + \ldots + x_N = 1$$

المبيعات القصيرة Short Sales:

في الأمثلة السابقة كانت جميع النسب موجبة ولكن حالة النسب السالبة ممكنة وتعني مبيعات قصيرة.

تعريف:

بيع قصير Short Sale (او **موقع قصير Short Position**) يمثل إمكانية بيع ضمان Security والذي لا يمتلكه البائع.

و الغرض منه هو الحصول على مكسب من إنخفاض متوقع لسعر الملكية. بالعكس من الموقع القصير هناك **الموقع الطويل Long Position** و الذي يعني شراء و إمساك ملكية. وفي هذه الحالة نسبة الملكية تكون موجبة في المحفظة.

مثال 5:

استثمر مالك 30$ في اسهم ملكية A_1 و 40$ في اسهم ملكية A_2 و استخدم اسهم ملكية شخص آخر A_3 و التي تساوي 20$ (بيع قصير). ماهي نسب الأسهم في هذه المحفظة؟

الحل:

القيمة المالية الكلية لهذه المحفظة هو

$$\$30 + \$40 - \$20 = \$50$$

النسب

$$A_1 : x_1 = \frac{30}{50} = 0.6$$
$$A_2 : x_2 = \frac{40}{50} = 0.8$$
$$A_3 : x_3 = \frac{-20}{50} = -0.4$$

و تمثل هذه المحفظة بـ

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.8 \\ -0.4 \end{bmatrix}$$

لاحظ ان المجموع يساوي 1

مثال 6:

عبد الرحمن استثمر 50$ في اسهم ملكية A_1 و أستخدم أسهم ملكية شخص آخر A_2 و التي تقدر بـ 10$ (بيع قصير) . ماهي نسب الأسهم في هذه المحفظة؟

الحل:

القيمة الملية الكلية

$50 - $10 = $40

و النسب

$$A_1 : x_1 = \frac{50}{40} = 1.25$$

$$A_2 : x_2 = \frac{-10}{40} = -0.25$$

و تمثل هذه المحفظة بـ

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ -0.25 \end{bmatrix}$$

لا حظ ان $1.25 > 1$ وذلك في حالة البيع القصير لأن نسبة أكبر من 1 ممكنة.

تقليل المخاطر Minimizing Risk:

لقياس المخاطرة في إستثمار سوف نستخدم الإنحراف المعياري Standard Deviation لعائد الإستثمار لأن الإنحراف المعياري يعبر عن التغير في العائد من الإستثمار.

مثال 7:

الجداول التالية تعطي العائد الممكن للملكيات A_1 و A_2 :

العائد من A_1	3	8
الإحتمال	0.4	0.6

العائد من A_2	5	10
الإحتمال	0.8	0.2

أي ملكية يجب على المستثمر إختيار اها؟

الحل:

العائدات المتوقعة

$$A_1 : \mu_1 = 3\times 0.4 + 8\times 0.6 = 6$$
$$A_2 : \mu_2 = 5\times 0.8 + 10\times 0.2 = 6$$

التباينات

$$A_1 : \sigma_1^2 = (3-6)^2 \times 0.4 + (8-6)^2 \times 0.6 = 6$$
$$A_2 : \sigma_2^2 = (5-6)^2 \times 0.8 + (10-6)^2 \times 0.2 = 4$$

و هكذا نرى أن الملكيات لها نفس العائد المتوقع و لكن التباين أقل للملكية A_2 و بالتالي اقل إنحراف معياري. إذا على المستثمر إختيار A_2 لأنها أقل مخاطرة.

مثال 8:

نفترض ان العائدات من الملكيات A_1 و A_2 في المثال السابق لها تغاير $\sigma_{12} = -1$

1) أوجد العوائد المتوقعة و التباينات للمحافظ التالية:

1) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

2) $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix}$

3) $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 1.2 \end{bmatrix}$

2) أي محفظة أفضل؟

الحل:

وجدنا سابقا

$$A_1 : \mu_1 = 6, \sigma_1^2 = 6$$
$$A_2 : \mu_2 = 6, \sigma_2^2 = 4$$

1)

$$x = 0.5r_1 + 0.5r_2,$$
$$\mu_x = 0.5\mu_1 + 0.5\mu_2 = 0.5\times 6 + 0.5\times 6 = 6$$
$$\sigma_x^2 = Var\left(0.5r_1 + 0.5r_2\right) = \left(0.5\right)^2 \sigma_1^2 + \left(0.5\right)^2 \sigma_2^2 + 2\times 0.5\times 0.5\times Cov\left(r_1, r_2\right)$$
$$= 0.25\times 6 + 0.25\times 4 + 0.5\times\left(-1\right) = 2$$

2)

$$y = 0.4r_1 + 0.6r_2,$$
$$\mu_y = 0.4\mu_1 + 0.6\mu_2 = 0.4\times 6 + 0.6\times 6 = 6$$
$$\sigma_y^2 = Var\left(0.4r_1 + 0.6r_2\right) = \left(0.4\right)^2 \sigma_1^2 + \left(0.6\right)^2 \sigma_2^2 + 2\times 0.4\times 0.6\times Cov\left(r_1, r_2\right)$$
$$= 1.92$$

3)

$$z = -0.2r_1 + 1.2r_2,$$
$$\mu_z = -0.2\mu_1 + 1.2\mu_2 = -0.2\times 6 + 1.2\times 6 = 6$$
$$\sigma_z^2 = Var\left(-0.2r_1 + 1.2r_2\right) = \left(-0.2\right)^2 \sigma_1^2 + \left(1.2\right)^2 \sigma_2^2 + 2\times -0.2\times 1.2\times Cov\left(r_1, r_2\right)$$
$$= 6.48$$

كل الإستثمارات لها نفس العائد المتوقع. الحقيبة y لها أقل تباين $\sigma_y^2 = 1.92$ ولهذا يعتبر أفضل إستثمار.

<u>مثال 9:</u>

الملكيات A_1 و A_2 لها مصفوفة تباين - تغاير

$$S = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) أوجد محفظة هذه الملكيات ذات أقل مخاطرة. (2) و تباينها.

الحل:

(1) نفترض أي محفظة $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \gamma \\ 1-\gamma \end{bmatrix}$ للملكيات A_1 و A_2 عائد المحفظة (نرمز له بنفس الرمز x) هو

$$x = \gamma r_1 + (1-\gamma) r_2$$

و تباينه هو

$$\sigma^2 = \gamma^2 \sigma_1^2 + (1-\gamma)^2 \sigma_2^2 + 2\gamma(1-\gamma)\operatorname{cov}(r_1, r_2)$$

و بالتعويض من مصفوفة التباين - التغاير بـ

$$\sigma_1^2 = 2,\ \sigma_2^2 = 3, \operatorname{cov}(r_1, r_2) = \sigma_{12} = -1$$

نجد

$$\sigma^2 = 2\gamma^2 + 3(1-\gamma)^2 - 2\gamma(1-\gamma) = 7\gamma^2 - 8\gamma + 3$$

لنرمز للمعادلة السابقة

$$f(\gamma) = \sigma^2 = 7\gamma^2 - 8\gamma + 3$$

نريد تصغير $f(\gamma)$ فنوجد المشتقة

$$f'(\gamma) = 14\gamma - 8$$

نجعل المشتقة $= 0$

$$f'(\gamma) = 14\gamma - 8 = 0$$

$$\gamma = \frac{4}{7}$$

ننظر إلى المشتقة الثانية

$$f''(\gamma) = 14 > 0$$

اي النقطة $\gamma = \frac{4}{7}$ تعطي اقل قيمة. و تكون المحفظة ذات أقل مخاطرة هي $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4/7 \\ 3/7 \end{bmatrix}$.

(2) تباين المحفظة

$$\sigma^2 = 7\gamma^2 - 8\gamma + 3 = 7\times\left(\frac{4}{7}\right)^2 - 8\times\left(\frac{4}{7}\right) + 3 = \frac{5}{7}$$

<u>تمرين:</u>

ملكيتين A_1 و A_2 لهم عائدات متوقعة 20% و 10% على التوالي ومصفوفة تباين - تغاير

$$S = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

أوجد حقيبة v لهذه الملكيات تعطي أقل مخاطرة إستثمارية وأوجد عائدها المتوقع وتباينها.

<u>المعالم الإحصائية لحقيبة تتكون من N ملكية:</u>

<u>Statistical Parameters of an N-Asset Portfolio:</u>

سوف نعتبر مجموعة ثابتة من الملكيات $A_1, A_2, ..., A_N$ و محافظ لهذه الملكيات.

بعض الرموز:

r_k العائد من الملكية A_k و $\mu_k = E(r_k)$ و $\sigma_k^2 = Var(r_k)$ و $\sigma_{kj} = \operatorname{cov}(r_k, r_j)$

و $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ متجة سطر ذا بعد 1xN و $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mu_1 & \cdots & \mu_N \end{bmatrix}$ متجة للعائدات

المتوقعة للملكيات و $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \cdots & \sigma_{NN} \end{bmatrix}$ مصفوفة التباين - التغاير لعائدات الملكيات.

سوف نفترض أن جميع العوائد المتوقعة $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mu_1 & \cdots & \mu_N \end{bmatrix}$ موجودة و $\det(S) > 0$
و الذي يضمن أن جميع المتغيرات العشوائية $r_1, \ldots, r_N$ مستقلة خطيا.

للمحفظة $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$

العائد هو $x = \sum_{i=1}^{N} x_i r_i$

العائد المتوقع هو $E(x) = \mu_x = \sum_{i=1}^{N} x_i \mu_i = \mathbf{Mx}$

إذا كان $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$ محفظة اخرى للملكيات $A_1, A_2, ..., A_N$ عندئذ

$$Cov(\mathbf{x},\mathbf{y}) = Cov\left(\sum_{i=1}^{N} x_i r_i, \sum_{j=1}^{N} y_j r_j\right) = \sum_{i,j}^{N} x_i y_j Cov(r_i, r_j)$$

$$= \sum_{i,j}^{N} x_i y_j \sigma_{ij} = \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{y}$$

حيث $\mathbf{x}^T$ معكوس $\mathbf{x}$ عندما يكون $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ عندئذ $Var(\mathbf{x}) = Cov(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{S}\,\mathbf{x}$ ويكون لدينا صيغ مصفوفية للمعالم الإحصائية للمحافظ $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ كالتالي

$$\mu_x = \mathbf{Mx}$$

$$\sigma_x^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{S}\,\mathbf{x}$$

$$Cov(\mathbf{x},\mathbf{y}) == \mathbf{x}^T \mathbf{S}\,\mathbf{y}$$

مغلف الملكيات المالية Envelope of Financial Assets :

المحافظ ذات العائد المتوقع الأعلى غالبا ما تكون ذات مخاطرة أعلى. من الممكن التعرف من بين جميع المحافظ و التي لها نفس العائد المتوقع على واحدة لها مخاطرة أقل أي على محفظة لها اقل تباين.

تعريف:

يقال على محفظة أنها محفظة مغلف Envelope Portfolio إذا كان لها أقل تباين من بين جميع المحافظ التي لها نفس العائد المتوقع.

محفظة مغلف تقلل خطر أي عائد مستهدف معطى.

تعريف:

مجموعة كل محافظ تغليف تسمى مغلف للملكيات $A_1, A_2, ..., A_N$ ويرمز لها

$.Env(A_1, A_2, ..., A_N)$

المحفظة $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$ تكون محفظة مغلف إذا كانت حلا لمشكلة التصغير التالية

$$\begin{aligned} & \min \quad Var(\mathbf{x}) \\ & st: \quad E(\mathbf{x}) = \mu \\ & \qquad \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \end{aligned}$$

حيث μ رقم حقيقي ثابت و $N \geq 2$.

يمكن وضع مشكلة التصغير على الشكل:

$$\begin{aligned} & \min \quad \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} \\ & st: \quad \mathbf{M}\mathbf{x} = \mu \\ & \qquad \mathbf{U}\mathbf{x} = 1 \end{aligned}$$

وهذه مشكلة برمجة تربيعية Quadratic Program وسوف نستعرضها بالأمثلة التالية:

مثال:

ثلاثة ملكيات لها عوائد متوقعة 3% و 1% و 3% على التوالي ومصفوفة تباين - تغاير $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ لعائد متوقع 5% . أوجد محفظة من هذه الملكيات ذات أقل مخاطرة.

الحل:

بإستخدام SageMath و مكتبة cvxopt للبرمجة الخطية و التربيعية

```
sage: import cvxopt
sage: from cvxopt import solvers
sage: from cvxopt.base import matrix
sage: RealNumber = float
sage: Integer = int
sage: S = 2*matrix([ [ 1.0,1.0,-1.0 ], [ 1.0,3.0,-2.0 ],[-1.0,-2.0,2.0 ]])
sage: p = matrix([0.0, 0.0, 0.0])
sage: G = matrix([[-1.0,0.0,0.0],[0.0,-1.0, 0.0], [0.0, 0.0, -1.0]])
sage: h = matrix([0.0,0.0,0.0])
sage: A = matrix([[1.0, 1.0, 1.0],[3.0, 1.0, 3.0]])
sage: A = A.T
sage: b = matrix([1.0,5.0])
sage: sol=solvers.qp(S, p, G, h, A, b)
     pcost       dcost       gap    pres   dres
 0:  2.8889e+00  4.1111e+00  1e+01  3e+00  5e+00
 1:  2.8957e+00  1.0288e+01  5e+00  2e+00  2e+00
 2:  2.8959e+00  9.3497e+02  5e+00  2e+00  2e+00
 3:  2.8960e+00  9.2480e+06  1e+01  2e+00  2e+00
 4:  2.8960e+00  1.5044e+09  2e+01  2e+00  2e+00
Terminated (singular KKT matrix).
sage: print(sol['x'])
[ 1.66e+00]
[-1.00e+00]
[ 3.39e-01]
sage: m = sol['x']
sage: print(m.T*S*m/2)
[ 2.90e+00]
```

إذا

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1.66 \\ -1.00 \\ 0.34 \end{bmatrix}$$

وتباين

$$\sigma_{\mathbf{x}}^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{S}\, \mathbf{x} = 2.9$$

وهكذا فإن المستثمر يمكن أن يتوقع عائد أعلى 5% من الحقيبة $\mathbf{x}$ و بأقل مخاطرة ممكنة 2.9

مثال آخر:

أربعة ملكيات لها عوائد متوقعة 1% و 3% و 1% و 1% على التوالي و مصفوفة تباين - تغاير

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

أوجد حقيبة إستثمار ذات أقل مخاطرة لعائد ارباح مستهدف 3% و اوجد تباينها.

الحل:

```
sage: import cvxopt
sage: from cvxopt import solvers
sage: from cvxopt.base import matrix
sage: RealNumber = float
sage: Integer = int
sage: S = matrix([ [ 3.0, 0.0,1.0,1.0 ], [ 0.0,2.0,-1.0, 0.0 ],[1.0,-1.0,1.0,
0.0 ],[1.0, 0.0, 0.0, 2.0]])
sage: p = matrix([0.0, 0.0, 0.0, 0.0])
sage: G = matrix([[-1.0,0.0,0.0, 0.0],[0.0,-1.0, 0.0, 0.0], [0.0, 0.0, -
1.0,0.0],[0.0, 0.0, 0.0,-1.0]])
sage: A = matrix([[1.0, 1.0, 1.0, 1.0],[1.0, 3.0, 1.0, 1.0]])
sage: A = A.T
sage: b = matrix([1.0,5.0])
```

```
sage: h = matrix([0.0,0.0,0.0,0.0])
sage: sol=solvers.qp(S, p, G, h, A, b)
     pcost       dcost       gap    pres   dres
 0:  4.8008e+00  6.3867e+00  2e+01  3e+00  6e+00
 1:  5.2465e+00  9.4012e+00  1e+00  7e-01  1e+00
 2:  5.1967e+00  3.8022e+01  3e+00  7e-01  1e+00
 3:  5.2093e+00  4.8954e+02  9e+00  7e-01  1e+00
 4:  5.2202e+00  2.4750e+04  6e+01  7e-01  1e+00
 5:  5.2221e+00  9.7005e+06  8e+02  7e-01  1e+00
 6:  5.2223e+00  9.4570e+10  1e+05  7e-01  1e+00
Terminated (singular KKT matrix).
sage: print(sol['x'])
[-3.33e-01]
[ 2.00e+00]
[-3.33e-01]
[-3.33e-01]
sage: m = sol['x']
sage: print(m.T*S*m/2)
[ 5.22e+00]
```

مكتبة cvxopt لحل البرمجة الخطية و التربيعية

Solving a linear and quadratic programs with cvxopt

أولا: البرمجة الخطية LP:

`cvxopt.solvers.lp`(*c*, *G*, *h*[, *A*, *b*[, *solver*[, *primalstart*[, *dualstart*]]]])

primal and dual linear programs لحل البرنامج الخطي الرئيسي و الثنائي

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & Gx + s = h \\ & Ax = b \\ & s \succeq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{maximize} & -h^T z - b^T y \\ \text{subject to} & G^T z + A^T y + c = 0 \\ & z \succeq 0. \end{array}$$

حيث x متغيرات القرار

c قيم دالة الهدف

G مصفوفة القيود و s المتغيرات الذائدة Slak

h الطرف الأيمن للقيود

A مصفوفة قيود للمسواة و b الطرف الأيمن

مثال:

solve the LP

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & -4x_1 - 5x_2 \\ \text{subject to} & 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{array}$$

```
>>> import cvxopt
>>> from cvxopt import matrix, solvers
>>> c = matrix([-4., -5.])
>>> G = matrix([[2., 1., -1., 0.], [1., 2., 0., -1.]])
>>> h = matrix([3., 3., 0., 0.])
>>> sol = solvers.lp(c, G, h)
>>> print(sol['x'])
[ 1.00e+00]
[ 1.00e+00]
```

ثانيا: البرمجة التربيعية Quadratic Programming

`cvxopt.solvers.qp`(*P*, *q*[, *G*, *h*[, *A*, *b*[, *solver*[, *initvals*]]]])

لحل البرنامج التربيعي و الثنائي

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & (1/2)x^T Px + q^T x \\ \text{subject to} & Gx \preceq h \\ & Ax = b \end{array}$$

and

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & -(1/2)(q+G^Tz+A^Ty)^TP^\dagger(q+G^Tz+A^Ty)-h^Tz-b^Ty \\ \text{subject to} & q+G^Tz+A^Ty\in \operatorname{range}(P) \\ & z\succeq 0. \end{array}$$

مثال:

حل البرنامج التربيعي:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & 2x_1^2+x_2^2+x_1x_2+x_1+x_2 \\ \text{subject to} & x_1\geq 0 \\ & x_2\geq 0 \\ & x_1+x_2=1 \end{array}$$

وهو على الشكل

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & (1/2)x^TPx+q^Tx \\ \text{subject to} & Gx\preceq h \\ & Ax=b \end{array}$$

$$\text{minimize } \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 2.0 & 0.5 \\ 0.5 & 1.0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1.0 & 1.0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

st

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\leq\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1.0 & 1.0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1.0 \end{pmatrix}$$

حيث

$$P=\begin{bmatrix} 2.0 & 0.5 \\ 0.5 & 1.0 \end{bmatrix}\ ,q=\begin{pmatrix} 1.0 & 1.0 \end{pmatrix}\ ,G=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;, A = \begin{pmatrix} 1.0 & 1.0 \end{pmatrix} \;, b = \begin{pmatrix} 1.0 \end{pmatrix}$$

```
>>> import cvxopt
>>> from cvxopt import matrix, solvers
>>> P = 2*matrix([ [2, .5], [.5, 1] ])
>>> q = matrix([1.0, 1.0])
>>> G = matrix([[-1.0,0.0],[0.0,-1.0]])
>>> h = matrix([0.0,0.0])
>>> A = matrix([1.0, 1.0], (1,2))
>>> b = matrix(1.0)
>>> sol=solvers.qp(Q, p, G, h, A, b)
>>> print(sol['x'])
[ 2.50e-01]
[ 7.50e-01]
```

تمارين: